# 安定写像の特異点集合の連結成分の数と特異値の配置について(実特異点の研究)

AUTHOR(S):

小林, 真人

数理解析研究所講究録
第 764 巻 1991 年 136-149



# 安定写像の特異点集合の連結成分の数と特異値の配置について

東工大・理・ 小林真人
(Mahito Kobayashi)

## §1. 問題の設定

滑らかな多様体が2つ与えられたとき、その間にどれだけ簡単な写像が存在するのか考えてみよう。相対関係の難しさを除くために、まず値域となる多様体が Euclid 空間であると仮定する。

たとえば、多様体 $M$ と $\mathbb{R}$ の間にはモース関数がたくさん存在するが、もし $M$ 上に特異点が2点しかないような「簡単」なモース関数が存在したら、実は $M$ は球面 $S^n$ と位相同型である。この良く知られた例が物語るように、多様体 $M$ のホモトピー型、位相型、$C^\infty$-構造を写像を用いて調べるとき、できるだけ簡単な写像を捜すことは、とても重要である。

さて、冒頭にかかげた基本姿勢に沿って、ここでは次のように問題を設定しよう。閉じた4次元単連結多様体の族 $\mathcal{M}_1$ を次のように定義する。

定義: $M^4 \in \mathcal{M}_1 \iff \exists f : M \longrightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2$, onto, stable,

s.t 1) $\forall a$, regular value に対して $f^{-1}(a)$ は
torus か sphere.
2) $f$ の cusp point は高々1点.

この多様体の族 $\mathcal{M}_1$ から平面への写像について調べることにする. とくに4次元多様体の族を選んだのは、M の $C^\infty$-構造はよく判っていないが、一般ファイバー、即ち閉曲面の $C^\infty$ 構造は解明されているからである. この族 $\mathcal{M}_1$ の「広さ」については未だ判然としないが、次のことが云える: $S^4$, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $S^2 \tilde{\times} S^2$ ($S^2$ 上の non-trivial $S^2$ bundle), 及びこれらの連結和は、$\mathcal{M}_1$ の元である.

<u>問題</u>: $M \in \mathcal{M}_1$ から $D^2$ への安定写像はどれだけ「簡単」になるか.

さて次に、どのような写像を簡単と呼ぶのか、提言しなければならない. 多様体を調べるという目的に沿って、対 $(f(M), C(f))$ の位相型が簡単であることを要求したい。

<u>定義</u>: $f: M \longrightarrow D^2$, stable が "simple"

$\Longleftrightarrow$ 1) $\#$ cusp of $f \leq 1$

2) $f \mid S(f) \setminus \{\text{cusp}\} : S(f) \setminus \{\text{cusp}\} \longrightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2$ が embedding.

3) 全ての f-map fibre $f^{-1}(a)$ が連結.

このような写像に対して $(f(M), C(f))$ はすでに簡単であると云って良いだろう.

事実: $M \in \mathcal{M}_1 \Rightarrow {}^\exists f : M \to D^2$, simple, かつ regular な f-fibre は $T^2$ か $S^2$.

簡単のために,「f の regular な fibre が $T^2$ か $S^2$」のとき,「$g_f \leq 1$」と書くことにしよう. 上の事実をふまえて, $M \in \mathcal{M}_1$ 上の "simple" かつ $g_f \leq 1$ の写像の間で, より「簡単」ということを次のように考える. (simple かつ $g_f < 1$ な map は, そうでない map より簡単だと思う). すなわち $f, g : M \to D^2$, simple, $g_f \leq 1$, $g_g \leq 1$ のとき, f が g より簡単 $\Leftrightarrow \# S(f) \lneq \# S(g)$. すると問題は次のように書き換えられる.

問題: $M \in \mathcal{M}_1$, $f : M \to D^2$ simple, $g_f \leq 1$
$\# S(f)$ はどこまで減らせるか?

注意 $f : M^4 \to \mathbb{R}^2$, stable の特異値集合 $S(f)$ は, M に埋込まれた何本かの simple closed curves となる. 特異点のタイプは, "fold" と "cusp" のみが現れる.

§2. 結果 ([Ma])

<u>定理A</u>: $M \in \mathcal{M}_1$, $f : M \to D^2$, simple, $g_f \leq 1$.

$$\Rightarrow \quad \# S(f) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} b_2(M) + 3 & (b_2(M),\ \text{偶数},\ \text{non } 0) \\ \frac{1}{2}(b_2(M) + 5) & (b_2(M),\ \text{奇数}) \end{cases}$$

ただし $\# S(f)$ は $S(f)$ の連結成分の数を, $b_2(M)$ は $M$ の第2 Betti 数をあらわす.

多様体 $M$ を homeo. に変形することを許せば、さらに詳しく次のことが示せる.

<u>定理B</u>: $M \in \mathcal{M}_1$, に対し $^\exists N \in \mathcal{M}_1$, s.t $N \approx M$ (homeo) $^\exists g : N \to D^2$, simple, $g_g \leq 1$ s.t

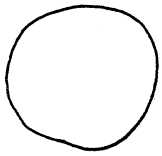
(1) $$\# S(g) \begin{cases} = 1 & (b_2(M) = 0) \\ \leq \frac{3}{2} b_2(M) + 1 & (b_2(M),\ \text{偶数},\ \text{non } 0) \\ \leq \frac{3}{2}(b_2(M) + 1) & (b_2(M),\ \text{奇数}) \end{cases}$$

(2) $g$ の特異値の配置は"自明", すなわち $D^2$ 内の $T^2$-fibred な連結領域の内側に、別の $T^2$-fibred な領域はない.

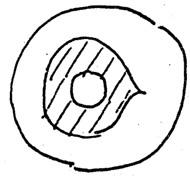
この2つの定理から, 多様体 $M \in \mathcal{M}_1$ の各 homeo 類に対して、次のような特異値集合を持つ簡単な写像の存在が示される.

例　$[M] \in \mathcal{M}_1/_{\text{homeo.}}$ 上には、次のような簡単な写像が存在する。

1) $b_2(M) = 0$ case,

$\exists f : [M] \longrightarrow$ 

2) $b_2(M) = 1$ case,

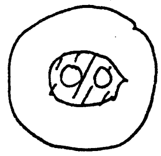
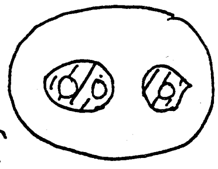
$\exists f : [M] \longrightarrow$ 

3) $b_2(M) = 2$ case,

$\exists f : [M] \longrightarrow$ 

＊斜線部は、その上の fibre $f^{-1}(a)$ が Torus となる領域。残りの一般 fibre は $S^2$.

4) $b_2(M) = 3$ case,

$\exists f : [M] \longrightarrow$  or 

5) ……

注意1：定理A, Bの等号を成立させる多様体と写像が存在する。

注意2：多様体Mが $M = M' \# S^2 \times S^2$, $M' \in \mathcal{M}_1$ と分解できるなら、Mの diffeo. 型を保ったまま定理B（をより強めたもの）が示せる。

以下の§で証明の概略を述べる。

## §3 写像の改変. ([Ma])

写像を取りかえる、いくつかの具体的な方法を説明しよう.

### I. 写像の連結和 $f \# g$

$f: M \to D^2$, $g: N \to D^2$, いずれも stable, onto とする. このとき $\partial D^2$ は definite な fold points $(u, x, y, z) \longmapsto (u, x^2+y^2+z^2)$ の像になっている. $f$ の像となる $D^2$ を $D_1$, $g$ のそれを $D_2$ と区別して書くことにしよう. 図 2.1 のように $\partial D_i$ の小さな弧と、その両端を結ぶ弦とで囲まれる $D_i$ 内の領域 $E_i$ を取ると Levine, ([$\bar{\mathbb{R}}^2$]) の議論から, $f^{-1}(E_1)$, $g^{-1}(E_2)$ は4次元円板 $D^4$ と diffeo. になる. そこで $M, N$ から $f^{-1}(E_1)$, $g^{-1}(E_2)$ をとり除いて連結和を取れば、写像

$$f \# g : M \# N \to D_1 \natural D_2 = D^2$$

が定義できる. $f \# g$ も stable である.

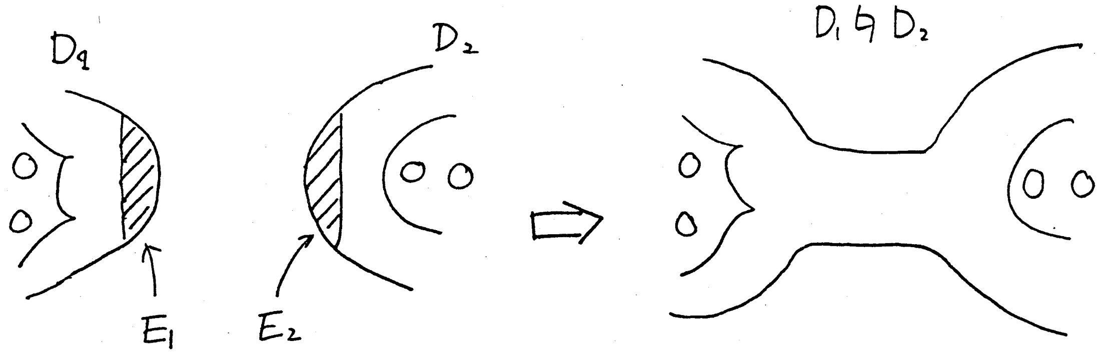



図 2.1.

次の記号を用意しておく.

<u>記号:</u> $f: M \to D^2$, $f_i: M_i \to D^2$, all stable.

$(M, f) = (M_1, f_1) \natural (M_2, f_2)$

$\Leftrightarrow$ 1) $M \cong M_1 \# M_2$ (diffeo)

2) $f$ と $f_1 \# f_2$ が $\mathcal{A}$-同値 ($M$ と $D^2$ の diffeo s で移りあう)

II. $f: M \to D^2$ から $\tilde{f}: M \# S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2$ をつくる.

$f: M \to D^2$ が stable のとき, 先に述べたように $\exists C \subset S(f)$, $\partial D^2 = f(C)$ である. $\partial D$ の小さなカラー近傍 $\bar{\tau(\partial D)}$ を取ると $f^{-1}(\tau(\partial D))$ は $C$ の tubular nbd. となる. これを $\nu(C)$ とかく.

このとき $\overline{M \setminus \nu(C)}$ と $S^2 \times D^2$ を貼り合わせて得られた多様体を $\tilde{M}$ と書こう. 今, $M$ が単連結と仮定すれば, Wall ([W]) の議論によって $\tilde{M} = M \# S^2 \times S^2$ or $M \# S^2 \tilde{\times} S^2$ となる. いま, ある貼り合わせで $\tilde{M}$ が後者になったとしよう. $\nu(C) \overset{h}{\cong} D^3 \times S^1$ の diffeo $\overset{h}{\vee}$ の類は $\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2$ に応じて2つあるので, non-Trivial な元に対応する diffeo. を1つ取って, それと先の貼り合わせを合成する. この合成写像で貼り直すと, 今度は $\tilde{M} = M \# S^2 \times S^2$ となる. そこで, $\tilde{M}$ が $M \# S^2 \times S^2$ となるように貼り合わせることにする.

さて, 多様体の改変に応じて写像 $f| : \overline{M \setminus \nu(C)} \to \overline{D \setminus \tau(\partial D)}$

と $\mathrm{proj}: S^2\times D^2 \longrightarrow D^2$ も貼り合わせることができて、

$\tilde{f}: M\# S^2\times S^2 \longrightarrow S^2 \ (= D^2 \cup_{\varphi} D^2)$

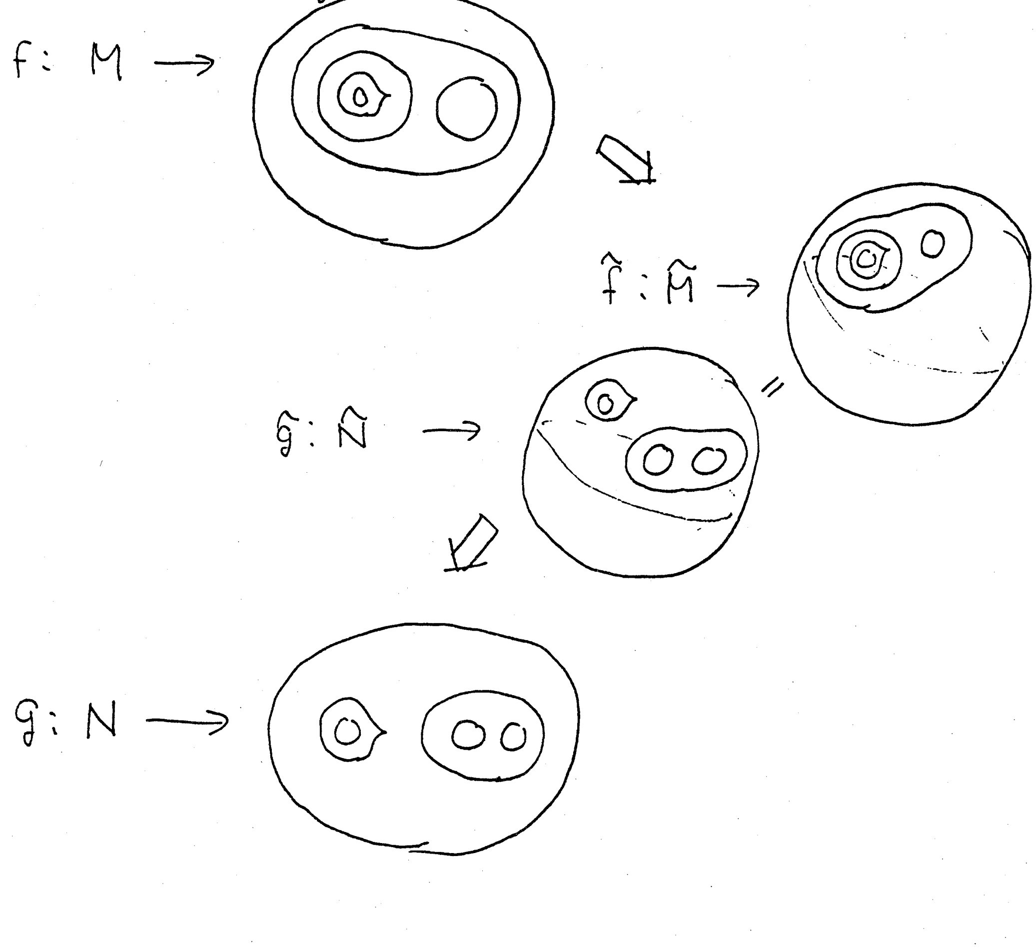
が定義される.

III S-operation

<u>定義</u> $f: M\to D^2$, $g: N\to D^2$, stable, $\pi_1(M)=\pi_1(N)=1$.

$(M,f)$ と $(N,g)$ が S-equivalent $\Leftrightarrow$ 1) $M\# S^2\times S^2$ と $N\# S^2\times S^2$ が diffeo. 2) $\hat{f}$ と $\hat{g}$ が $\mathcal{A}$-同値.

<u>例</u>. $(M,f)\underset{S\text{-eq}}{\sim}(N,g)$



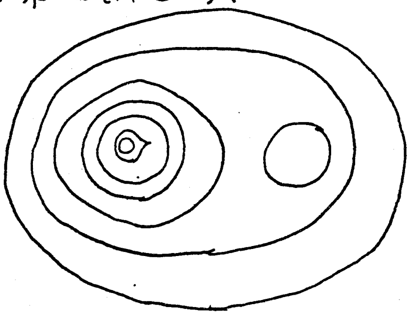
定義：（S-operation） 多様体と写像の組 $(M,f)$ に S-operation を施す $\Longleftrightarrow$

$$(M,f) = (M_1,f_1) \sqcup (M_2,f_2) \sqcup \cdots \sqcup (M_k,f_k)$$

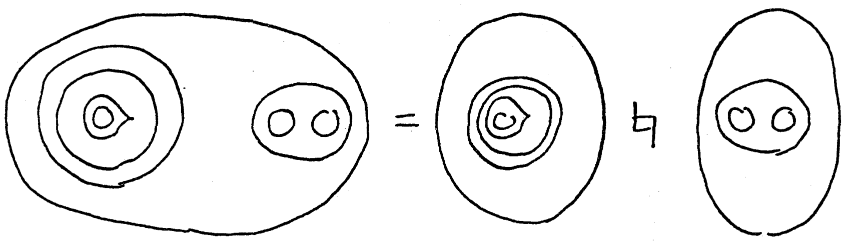
と分解して，ある $(M_i,f_i)$ を S-equivalent な $(N_i,f_i)$ で置き換える。

この操作の効果を示そう。

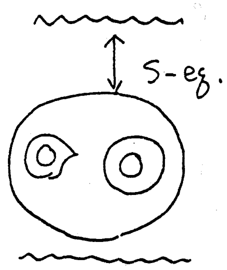
例

$f : M \rightarrow$ 

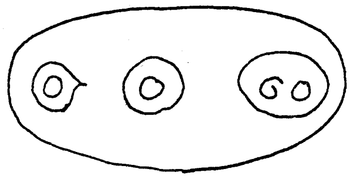
S-equivalent

$g : N \rightarrow$ 

$(g,N) = (g_1,N_1) \sqcup (g_2,N_2)$

$h_1 : L_1 \rightarrow$ 

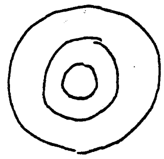

$(M,f) \underset{\text{S-op}}{\sim} (L_1,h_1) \sqcup (g_2,N_2)$

s.t. $h_1 \# g_2 : L_1 \# N_2 \longrightarrow$ 

ここで $\pi_1(M), \pi_1(N) = 1$ ならば，$M \# S^2\times S^2 \cong N \# S^2 \times S^2$ のとき $M \approx N$ となることに注意すれば；

S-operation の効果： 多様体の homeo type を保って特異値の配置を"自明"にする.

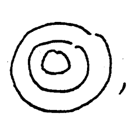
IX C-operation.

補題 (Teragaito, Levine,) $\pi_1(M^4) = 1$, $\exists f : M \to D^2$ stable, $g_f \leq 1$. s.t $(f(M), C(f)) =$ 

$\Rightarrow M \cong S^4$

ところで $S^4$上には，$(f(M), C(f)) = (D^2, \partial D^2)$ となるような simple map が存在する. そこで $S^4$上で写像を取り換えれば，この2本の特異点のなす曲線が除去される.

定義：(C-operation) 多様体 $M \in \mathcal{M}_1$ と安定写像の組 $(M, f)$ で次を満たすものを考える.

$(M, f) = (M_1, f_1) \sqcup (M_2, f_2)$, $f_2 : M_2 \to$ , $g_{f_2} \leq 1$

このとき $(M, f)$ に C-operation を施す

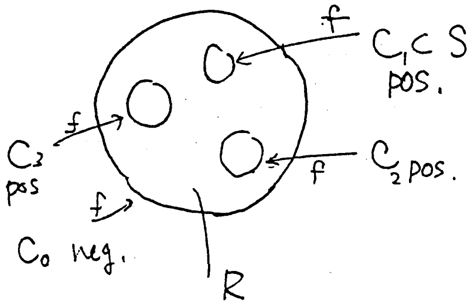
$\Leftrightarrow$ $(M, f)$ を $(M_1, f_1)$ に取りかえる.

C-operation の効果： 多様体の diffeo. type を保って1対の fold curves を cancel する。

## §4. 証明の輪郭

あと1, 2の準備をすれば証明は、(少くともその輪郭は)簡単にできる。 面倒なので、以下 $b_2(M) = \text{even}$ とする。

R を正則値 $f(M) \setminus C(f)$ の連結成分で、その上の fibre がトーラスになっているものとする。$\overline{R}$ の外側の境界に対応する曲線 $C \subset S(f)$ を negative curve, 内側のそれを positive curve と呼ぼう。 R は必らず穴を持つことが示される。




S(f) の各成分は、$\partial f(M)$ に対応する1つを除いて全て、positive か negative になっている。この S(f) の"向き付け"に対して次の Levine の式が成立する。

$$b_2(M) = 2\left(N_+(\#\text{of all positive curves}) - N_-(\#\text{of neg. curves})\right)$$

定理A の証明. ($b_2(M) = 4$ のとき)

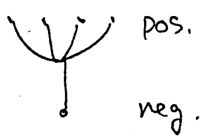
$N_+ - N_- = 2$ , $S(f) = N_+ + N_- + 1$ だから
$S(f) = 2N_- + 3$ となる. ここで $N_-$ の最小値を求めれば良いが, $N_-=0$ だと, 前述の領域 R は存在しないことになる. したがって $S(f)$ は $\partial f(M)$ に対応する1本だけとなり, 矛盾を生ずる. よって $\min N_- = 1$ となり,

$$S(f) \geq 2+3=5 .$$

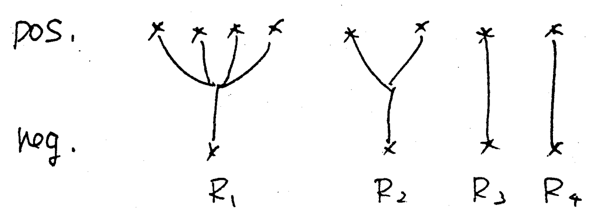
(「=」を満たす M と f は具体的に作れる) □

<u>定理Bの証明</u> ($b_2(M)=4$ のとき)

まず勝手に $f: M \to D^2$, simple, $g_f \leq 1$ を取ってくる. $(M,f)$ に S-operation を施して特異値の配置が「自明」な組 $(N,h)$ を作る. $N \approx M$ と $\# S(f) = \# S(g)$ に注意しておく、"トーラスファイバー"の領域Rは, 1つの negative curve に対して複数の pos. curve を対応させているが, これを模式的に

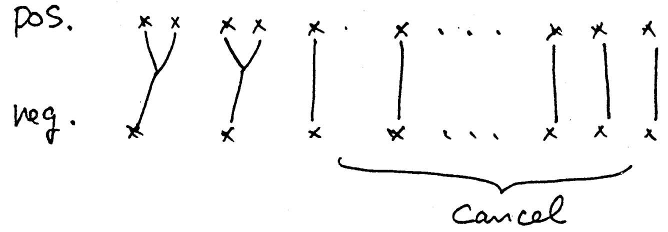



と表わそう. 全ての pos. 又は neg. curves の間の対応関係を同じように表わそう.



さて，上図の$R_3$, $R_4$ に対応する部分は，C-operation が適要できることを示している．従って (N, f) に C-oper. を施してこの4つの$S(f)$の成分は除去できる．

$N_+ - N_- = 2$ を用いて、cancel される$S(f)$の成分が最小となる組合わせを調べると，

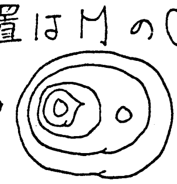
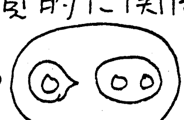



従って、どんなに「まずい」組合わせでも、$\# S(f)$ は $4+2+1=7$ 以下には減らせる．（最後の $+1$ は $\partial f(M)$ の分）
この「=」を成立させる$M$と$f$が具体的に作れる．□

§5. 明らかになった問題

問題1　定理Bで求められた簡単な写像から$M \in \mathcal{M}_1$ の位相型を求めよ．

問題2　$C(f)$の配置は$M$の$C^\infty$構造と本質的に関係するか．

たとえば，$M \xrightarrow{f}$  に対し $\exists N \xrightarrow{g}$ , $N \approx M$.

であるが、$M \cong N$ が云えるか？

## 参考文献

[Ma] Mahito. K, Simplifying mappings from certain simply connected 4-manifolds into the plane, (preprint)

[R²] H. Levine, Mappings of manifolds into the plane Amer. J. Math. 88 (1966), 357-365.

[W] C.T.C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, Journal. London Math. Soc. 39 (1964) 131-140.

M. Teragaito, Fibred 2-knots and lens spaces, Osaka J. Math. 26 (1989), 57-63, 953.